

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ II
Εξετάσεις Ιουνίου 2002

ΘΕΜΑ 1

(α) Αναπτύξτε την μέθοδο του τραπεζίου για τον αριθμητικό υπολογισμό του ολοκληρώματος:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

όπου $f(x)$ συνεχής και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[a,b]$. Γράψτε το ολοκλήρωμα $I(f)$ σε μία κλειστή μορφή (ως άθροισμα) ώστε να μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά. (1.5M)

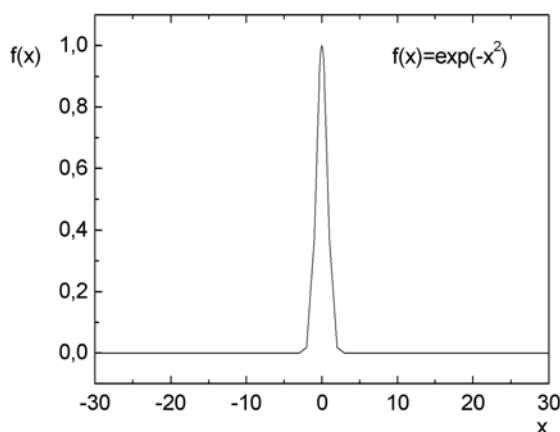
(β) Χρησιμοποιώντας την μέθοδο του τραπεζίου για το υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$I(f) = \int_{-30}^{30} \exp(-x^2)dx$$

με αριθμό υποδιαστημάτων $N=12$ βρίσκουμε $I(f) = 5.000$. Η πραγματική τιμή του

ολοκληρώματος είναι $\int_{-30}^{30} \exp(-x^2)dx \approx \sqrt{\pi}$. Δικαιολογήστε την απόκλιση της τιμής

που υπολογίζουμε αριθμητικά από την ακριβή τιμή χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα: (1M)



ΘΕΜΑ 2

(α) Αναφέρετε τις αριθμητικές μεθόδους που γνωρίζετε για την εύρεση ριζών εξισώσεων της μορφής $f(x) = 0$ και τα απαραίτητα δεδομένα που χρειάζεται η κάθε μία από αυτές προκειμένου να εφαρμοστεί. (0.5M)

(β) Περιγράψτε τη μέθοδο Newton-Raphson και επιλέγοντας το κατάλληλο αρχικό σημείο υπολογίστε τη θετική ρίζα της εξίσωσης $\ln(x) + 0.3x = 0$ με υπολογιστή τσέπης και ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων. (1.5M)

(γ) Αποδώστε σε πρόχειρα γραφήματα δύο περιπτώσεις συναρτήσεων και αρχικών συνθηκών για τις οποίες η μέθοδος των Newton-Raphson αποτυγχάνει να συγκλίνει. (0.5M)

ΘΕΜΑ 3

Θεωρείστε ότι έχετε καταχωρημένα σε πίνακες τα ζεύγη τιμών $(x, f(x))$ ως εξής:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
$f(x_i)=f_i$	f_1	f_2	f_3	f_4

Θεωρήστε επίσης ένα πολυώνυμο βαθμού n της μορφής

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

(α) Ποιος είναι ο μικρότερος βαθμός του πολυωνύμου (παρεμβολής) που διέρχεται και από τα τέσσερα ζεύγη τιμών του παραπάνω πίνακα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (1 M)

(β) Υπολογίστε τους συντελεστές ενός πολυωνύμου $2^{\text{ου}}$ βαθμού που να διέρχεται από τα τρία πρώτα ζεύγη τιμών. (Ως συνάρτηση των δεδομένων (x_i, f_i) , $i=1,2,3$.) (1.5M)

ΘΕΜΑ 4

(α) Αναπτύξτε τη μέθοδο Taylor για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ στο διάστημα $x \in [a, b]$ με αρχική συνθήκη $y(x=a) = c$. (Για την αναδρομική σχέση κρατήστε μέχρι όρους δευτέρας τάξης στο ανάπτυγμα Taylor.) (0.75M)

(β) Αναπτύξτε τη μέθοδο Euler για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = 0$ στο διάστημα $x \in [a, b]$ και με αρχικές συνθήκες $y(x=a) = c$ και $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = d$. (0.75M)

(γ) Η παρακάτω διαφορική εξίσωση είναι γνωστή ως εξίσωση απόσβεσης:

$\frac{dn}{dt} = -\gamma(t)n(t)$, $\gamma(t) > 0$. Εάν $\gamma(t) = 2(t+1)$ και $n(t=0) = 1$, επιλύστε την παραπάνω εξίσωση με διαμέριση 5 σημείων στο διάστημα $t \in [0,1]$ με τη μέθοδο Taylor. (1M)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Τμήμα Επιστήμης των Υλικών

Πληροφορική II

Εξετάσεις περιόδου Ιουνίου 2005

Ημερομηνία: 9/6/2005

Επώνυμο: Όνομα: Αριθμός μητρώου:

1. Θεωρήστε το παρακάτω ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$E_n = \int_0^1 x^n \exp(x-1) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Για τον αριθμητικό υπολογισμό του E_n χρησιμοποιούμε τις παρακάτω αναδρομικές σχέσεις για την κατασκευή σχετικών αλγορίθμων:

$$(a) \quad E_n = 1 - nE_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

όπου $E_1 = 1/e$.

$$(b) \quad E_{n-1} = (1 - E_n)/n, \quad n = \dots, 2, 3$$

όπου $E_{20} = 0$.

Υποδείξτε ποιός από τους δύο αλγόριθμους είναι ευσταθής δοκιμάζοντας να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα για $n = 10$, δηλαδή το E_{10} . Δίνεται η ακριβής τιμή του $E_{10} = 0.0838771$. Που οφείλεται το σφάλμα στον υπολογισμό του E_{10} στον ασταθή αλγόριθμο;

2. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Newton-Raphson για την εύρεση της ρίζας της εξίσωσης

$$\sin x - 0.1x + 0.3 = 0$$

στο διάστημα $[5, 7]$ με υπολογιστή τσέπης και ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

3. Για την κατασκευή ενός αμόρφου υλικού ψύχουμε απότομα το τήγμα του από υψηλή θερμοκρασία σε θερμοκρασία υγρού ηλίου $T = 4$ K. Κατά τη διάρκεια της απότομης ψύξης συλλέχθηκαν οι παρακάτω τιμές της θερμοκρασίας σε διαφορετικές χρονικές στιγμές:

t (s)	T (K)
0	700
20	210
40	88
60	4

Υπολογίστε τις τιμές της θερμοκρασίας T και του ρυθμού ψύξης dT/dt τις χρονικές στιγμές $t = 22, 36, 47$ s χρησιμοποιώντας την πολυωνυμική παρεμβολή (Lagrange).

4. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y + 2$$

με $y(0) = 0$ και $x \in [0, 1]$. Η αναλυτική λύση του προβλήματος είναι

$$y(x) = y_{anl}(x) = -4e^{-x} + x(x - 2) + 4$$

Βρείτε την άγνωστη συνάρτηση $y_{num}(x)$ και αριθμητικά εφαρμόζοντας τη μέθοδο Euler με βήμα $h = 0.2$. Έχοντας επιλύσει το πρόβλημα και αριθμητικά συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

x	y_{num}	y_{anl}	E
0.0			
0.2			
0.4			
0.6			
0.8			
1.0			

όπου $E = y_{anl} - y_{num}$ είναι το σφάλμα στον αριθμητικό προσδιορισμό της συνάρτησης.

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες

**ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΙΙ**

**Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2005
(19-9-2005)**

Επώνυμο: Όνομα: Α. Μ. :

ΘΕΜΑ 1

Αναλύστε τη μέθοδο της διχοτόμησης για την εύρεση της ρίζας μιας εξίσωσης χρησιμοποιώντας κατάλληλο παράδειγμα

(2.5M)

ΘΕΜΑ 2

Επιλύστε το παρακάτω γραμμικό σύστημα εξισώσεων εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss και πίσω αντικατάσταση.

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\-x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \\x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= -2\end{aligned}$$

(2.5M)

ΘΕΜΑ 3

Υπολογίστε το παρακάτω ολοκλήρωμα αριθμητικά χρησιμοποιώντας μια μέθοδο της αρεσκείας σας.

$$\int_{-1}^1 x^2 \sin^2 x \, dx$$

Η ακρίβεια στον υπολογισμό του ολοκληρώματος να είναι μικρότερη του 10^{-2} .

(2.5M)

ΘΕΜΑ 4

Σώμα μάζας $m = 2 \text{ Kg}$ αφήνεται να πέσει ελεύθερα ($v = 0$) από μεγάλο ύψος. Στο σώμα, εκτός από το βάρος του mg ασκείται οπισθέλκουσα δύναμη (τριβή του αέρα) ανάλογη της ταχύτητας του σώματος ($F = -bv$, $b = 6 \text{ Ns/m}$). Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για το σώμα γράφεται:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Euler συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

t (s)	v (m/s)
0	
0.2	
0.4	
0.6	
0.8	
1.0	
1.2	
1.4	
1.6	
1.8	
2.0	

Πόση είναι η οριακή ταχύτητα που αποκτά το σώμα; Δίνεται ότι $g = 10 \text{ m/s}^2$. **(2.5M)**

**ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΙΙ**

**Εξεταστική Ιουνίου 2006
(12-9-2006)**

Επώνυμο: **Όνομα:** **A. M. :**

ΘΕΜΑ 1

Περιγράψτε τη διαδικασία αριθμητικής εύρεσης της ρίζας μιας εξίσωσης με την μέθοδο Newton – Raphson, χρησιμοποιώντας ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

(2.5M)

ΘΕΜΑ 2

Ένα σωματίδιο κινείται σε μία διάσταση και η θέση του x για κάποιες χρονικές στιγμές t δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

t (sec)	x (cm)
0.0	1.32
0.5	1.89
1.0	1.12
1.5	2.15

Χρησιμοποιώντας πολυωνυμική παρεμβολή, υπολογίστε τη θέση του σωματιδίου για $t=0.25, 0.75, 1.25$, καθώς και την ταχύτητά του για τις ίδιες χρονικές στιγμές.

(2.5M)

ΘΕΜΑ 3

Ένα ραδιενεργό υλικό διασπάται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\frac{dN}{dt} = -bN$$

όπου N είναι οι πυρήνες που απομένουν αδιάσπαστοι και b σταθερά. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Euler συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

t (s)	N
0	
0.2	
0.4	
0.6	
0.8	
1.0	

Δίνεται ότι $b=1.5 \text{ s}^{-1}$ ενώ για $t=0$ έχουμε $N=1000$ πυρήνες.

(2.5M)

ΘΕΜΑ 4

Υπολογίστε το παρακάτω ολοκλήρωμα αριθμητικά χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simpson

$$I = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x - 7) dx$$

διαμερίζοντας το διάστημα της ολοκλήρωσης σε 5 διαστήματα. Κατόπιν, υπολογίστε το ολοκλήρωμα και αναλυτικά. Βρείτε το σχετικό σφάλμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης (πόσο τοις εκατό διαφέρει η αριθμητική τιμή από το ακριβές αποτέλεσμα).

(2.5M)

**Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΙΙ**

**Εξεταστική Σεπτεμβρίου 2006
(26-9-2006)**

Επώνυμο: **Όνομα:** **A. M. :**

ΘΕΜΑ 1

Βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x) = -x \exp(-x^2)$ στο διάστημα $[0,1]$ με ακρίβεια 0.001 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Newton – Raphson.

(2.5M)

ΘΕΜΑ 2

Επιλύστε το παρακάτω γραμμικό σύστημα εξισώσεων εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss και πίσω αντικατάσταση.

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 1$$

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -1$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 3$$

(2.5M)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης:

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Euler συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

x	y
0	
0.2	
0.4	
0.6	
0.8	
1.0	

Δίνεται ότι $y(0)=1$.

(2.5M)

ΘΕΜΑ 4

Υπολογίστε το παρακάτω ολοκλήρωμα αριθμητικά χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Romberg

$$I = \int_0^1 x^2 \sin x \, dx$$

διαμερίζοντας το διάστημα της ολοκλήρωσης σε $N=5$ και 10 υποδιαστήματα.

(2.5M)

**Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**